$\boxed{1}$

問2 $\dfrac{(7a+b)}{5}-\dfrac{(4a-b)}{3}=\dfrac{3(7a+b)-5(4a-b)}{15}$ **※ 分子は最初に( )でくくっておく**

$=\dfrac{21a+3b-20a+5b}{15}=\dfrac{a+8b}{15}$

問6 $2x^2-3x-6=0$

$\dfrac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot(-6)}}{2\cdot2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9+48}}{4}=\dfrac{3\pm\sqrt{57}}{4}$

※2016年は因数分解できる問題。それ以降は毎年解の公式を使う問題。

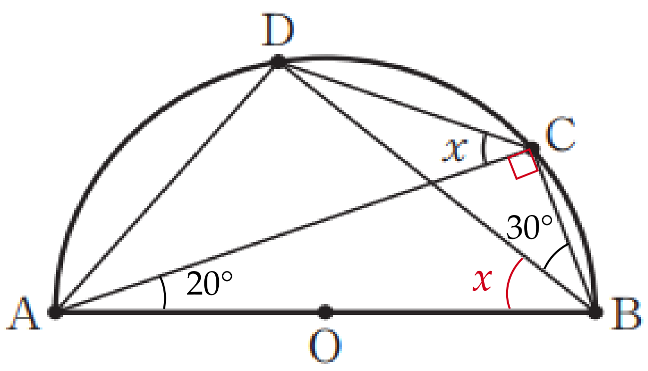
問7 6個の玉から2個取り出す組み合わせは、$\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$通り。

このうち2個とも青玉となる組み合わせは、$\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$通り。

従って、求める確率は$\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$

※いくつかのものの中から選ぶ場合は、区別できないモノの場合も、青1、青2などとして区別する。その他サイコロ2個なら、大と小の区別があると考える。
※確率と統計が毎年交互に出題されている。今年は確率が出題された。では来年は?

問8



$\overset{\frown}{AB}$の中心角は180°だから、$\angle ACB=90°$。よって$\triangle ABC$は直角三角形となり
$20°+(30°+\angle ABD)=90°$, $\angle ABD=40°$
$\overset{\frown}{AD}$を共有する円周角は等しいから$\angle ACD=\angle ABD=40°$
従って、$x=40°$

※円周角は毎年出題される。大問$\boxed{1}$の小問として出題されるか、又は大問$\boxed{4}$図形として出題される。
大問$\boxed{1}$の小問として出題される場合は易しいが、大問$\boxed{4}$で出題される場合は難易度が高くなる。今年は大問$\boxed{1}$で出題された。では来年は?

問9

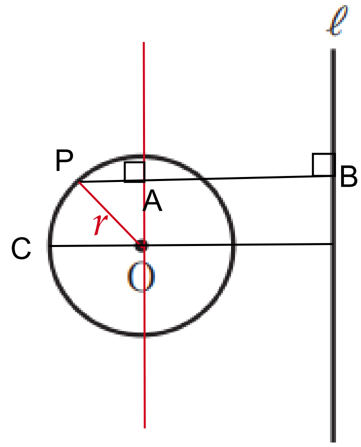
円周上の点Pからlまでの距離は、点Pからlに垂線をおろした時の長さ。その長さが最も長くなる場合はどこか?
$(PB = PA + AB,\ AB$は一定$)$

・Oを通ってlと平行な直線とPBの交点をAとする
・$\triangle OAP$は直角三角形で斜辺$OP > PA$
・PAが最長になるのはPがCと同じ位置に来た時で、
　$PA = OP = r$となる。

作図の手順
・Oからlに垂線をおろす (作図の基本4パターンの資料参照)
・垂線と円周の交点のうち、lに対してOの反対側の点が求めるPとなる

※作図問題は基本4パターンを押さえておけば解答可能。

図 2

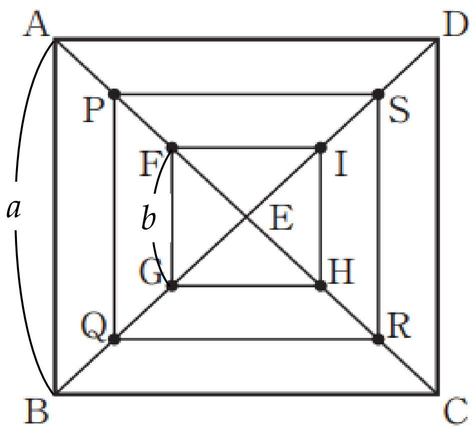


$\boxed{2}$

・文字式の扱いに関する問題。題材としては図形に関するもので、面積や体積を求める基本的な公式の知識も必要。
・難易度は高くないが、例年正答率が低い。
・過去に類題あり、また教科書にも類題が掲載されている。
・先生が作成した基本的な問題をもとに、生徒が新たな問題を考える流れの探求型学習をイメージした問題形式。ただし、問題を解くに際して、探求的な要素は関係してこない(形式だけ探求型?)。

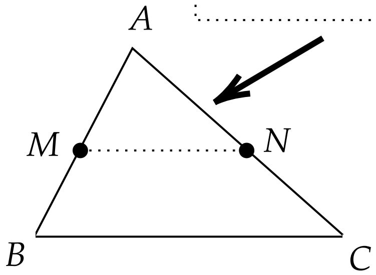
問1

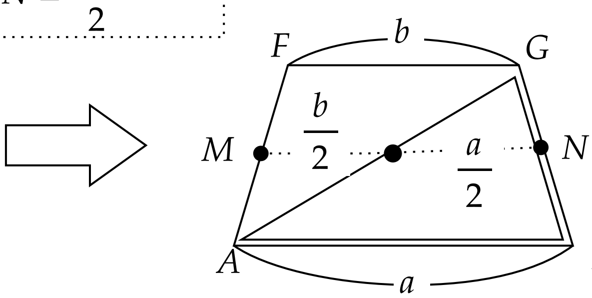
・$EF = EG = EH = EI$より、□$FGHI$は正方形で、$FG \parallel AB$
・中点連結定理により、$PG \parallel FG$、
$PG = \frac{1}{2}(FG + AB) = \frac{1}{2}(a + b)$
・□$PQRS$も正方形だから、
$l = 4 \times PG = 4 \times \frac{1}{2}(a + b) = 2a + 2b$



中点連結定理

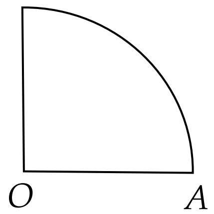
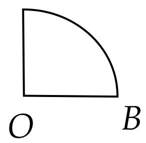
中点連結定理
M, NがAB, ACの中点なら、
$MN \parallel BC$, $MN = \dfrac{BC}{2}$



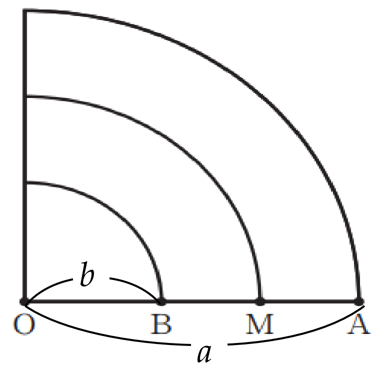


$MN = \dfrac{a+b}{2}$

問2

$S =$  $-$ 

$= \dfrac{\pi}{4}a^2 - \dfrac{\pi}{4}b^2$

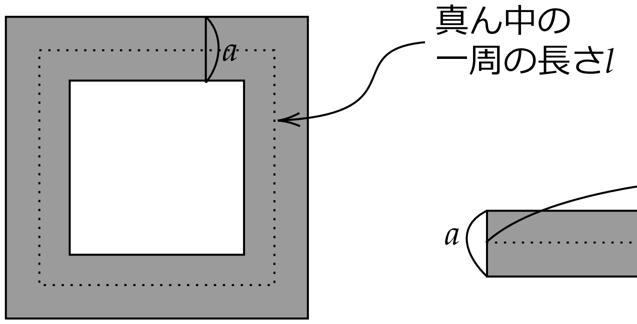


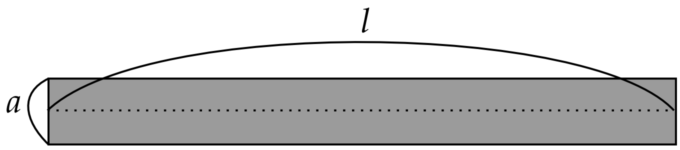
一方、MはA, Bの中点だから、$OM = \dfrac{a+b}{2}$

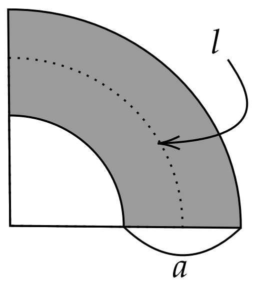
よって、$l = 2 \times \dfrac{a+b}{2}\pi \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{\pi}{4}(a+b)$

以上から、$S = \dfrac{\pi}{4}a^2 - \dfrac{\pi}{4}b^2 = \dfrac{\pi}{4}\left(a^2 - b^2\right) = \dfrac{\pi}{4}(a+b)(a-b) = (a-b)l$

(参考)　探求型学習の課題例







左の2つのグレー部分の面積は右の長方形と同じ。
曲がった道でも直線道路と同じく、面積=道幅$a \times$長さl
・他の図形でも成り立つのだろうか?
・なぜ成り立つのか?

$\boxed{3}$ 問3

1. 解析的な解法
   (Pのx座標をtとして方程式に持ち込む)

$\triangle APB$の面積を求める(左右2つに分割)

- Aを通りx軸と垂直な線とlの交点Cの座標を求める
- $AC = \frac{5}{2} - (-2) = \frac{9}{2}$
- 左側の面積 $= \frac{9}{2} \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{45}{4}$
- 右側の面積 $= \frac{9}{2} \times (t-3) \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}(t-3)$
- 左右合わせると$\frac{9}{4}(t-3) + \frac{45}{4}$

$\triangle BPQ$の面積は

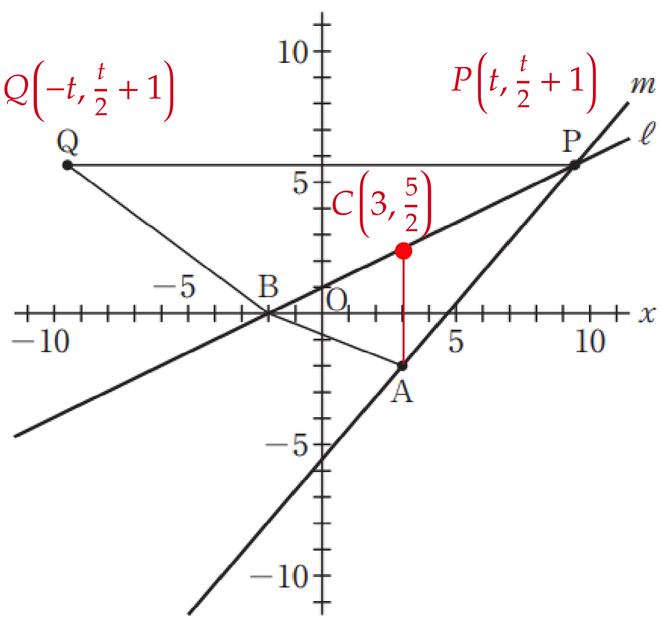
$$2t \times \left(\frac{t}{2}+1\right) \times \frac{1}{2} = \left(\frac{t}{2}+1\right)t$$

$\triangle BPQ = 2 \times \triangle APB$であるとき

$$\left(\frac{t}{2}+1\right)t = 2\left\{\frac{9}{4}(t-3) + \frac{45}{4}\right\}$$

$t^2 - 7t + 18 = 0,\ \ t > 0$なので$t = 9$

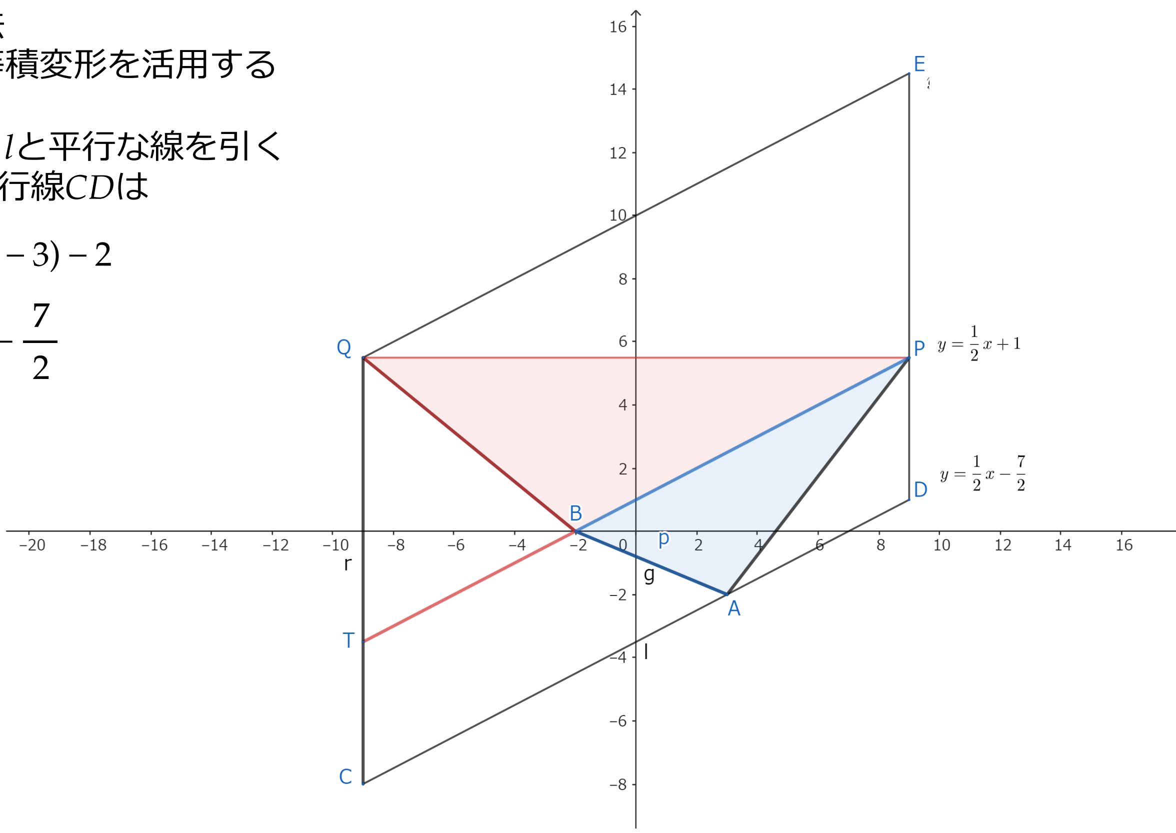
図 2



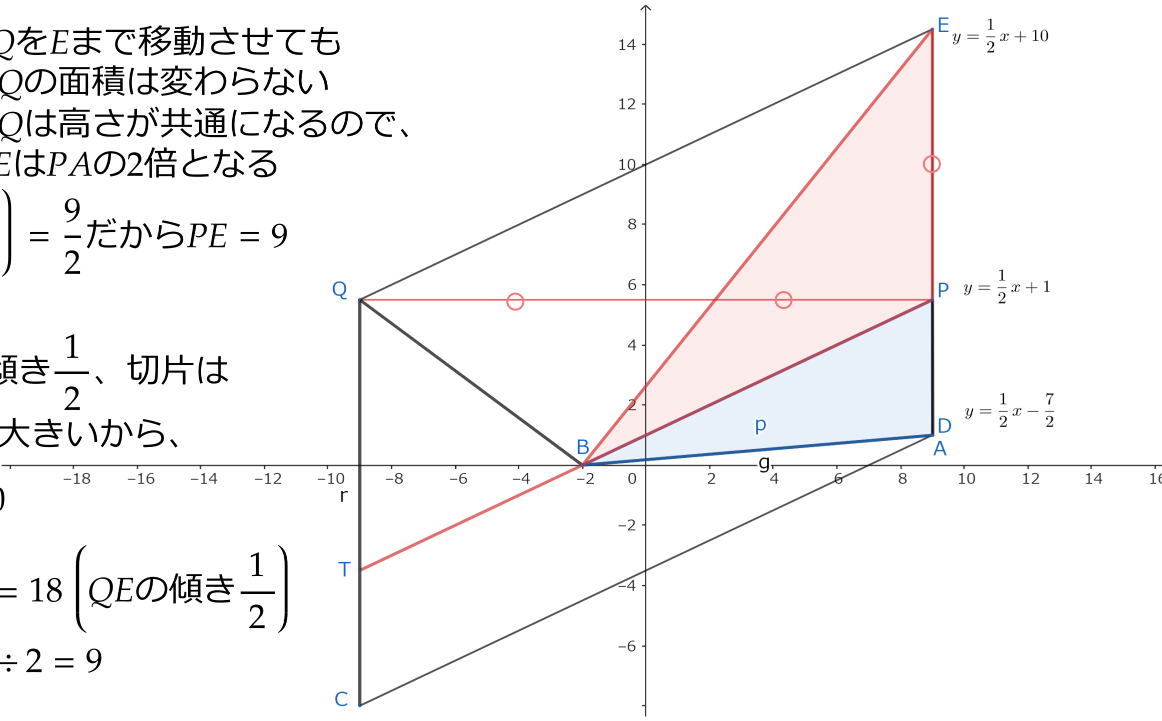
2. 図形的解法
   三角形の等積変形を活用する

- A, Qを通りlと平行な線を引く
- Aを通る平行線CDは

$$y = \frac{1}{2}(x-3) - 2$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$

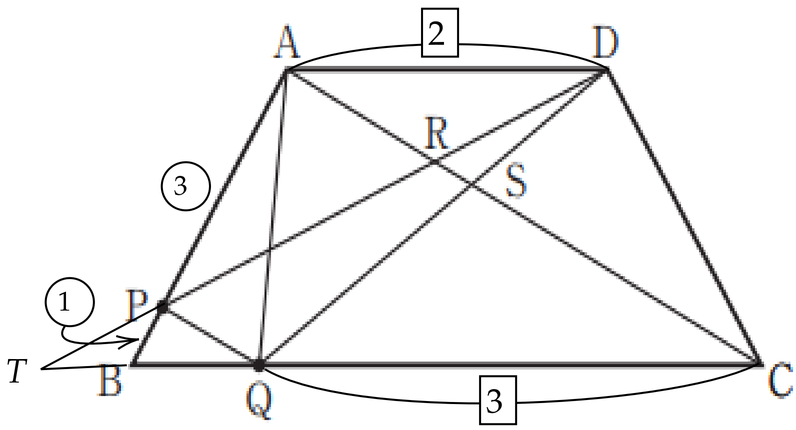


- AをDまで、QをEまで移動させても $\triangle APB,\ \triangle BPQ$の面積は変わらない
- $\triangle APB,\ \triangle BPQ$は高さが共通になるので、底辺となる$PE$は$PA$の2倍となる
- $PA = 1 - \left(-\dfrac{7}{2}\right) = \dfrac{9}{2}$だから$PE = 9$
- 平行線QEは傾き$\dfrac{1}{2}$、切片はlの切片より9大きいから、$y = \dfrac{1}{2}x + 10$
- $PQ = 2 \times PE = 18 \left(QEの傾き\dfrac{1}{2}\right)$
- Pの座標は$18 \div 2 = 9$



※解析的に進めるのが無難、2次方程式は大抵因数分解できるようになっているので、因数分解出来ない時は計算ミスを疑ったほうがよい。計算は分数があってやや面倒。
話はそれるが、座標に結構正確な目盛りがあって、目盛りを頼りに正解を答えられてしまう。たびたび批判されているが、改善されない。

$\boxed{4}$ 問3



・相似の頻出構図

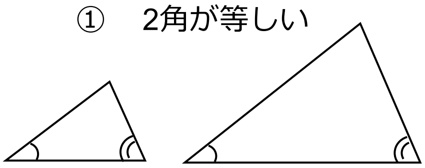
・答えまでの方針を立てる
1. RSとACの長さの比が分かれば$\triangle DRS$と$\triangle ACD$の
面積比が分かる
2. $\triangle ACD$と$\triangle ABC$の面積比が分かれば$\square ABCD$と
$\triangle ACD$の面積比が分かる

・手順
- $\triangle SAD$と$\triangle SCQ$は相似なので$AS : SC = 2 : 3$
- $\triangle PAD$と$\triangle PBT$は相似なので$AD : BT = 3 : 1$, よって$BT = \boxed{\frac{2}{3}}$
- $\triangle BPQ$と$\triangle BAC$は相似なので$BQ : QC = 1 : 3$, よって$BQ = \boxed{1}$
- $TC = TB + BQ + QC = \boxed{\frac{2}{3}} + \boxed{1} + \boxed{3} = \boxed{\frac{14}{3}}$
- $\triangle RAD$と$\triangle RTC$は相似なので$AR : RC = 2 : \frac{14}{3} = 3 : 7$
- $AS : SC = 2 : 3,\ \ AR : RC = 3 : 7$より$RS = \frac{1}{10}AC$　(連比の計算)
- $\triangle ACD : \triangle ABC = 1 : 2$, よって$\triangle ACD = \frac{1}{3}\square ABCD$
- $\triangle DRS = \frac{1}{10}\triangle ACD = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}\square ABCD = \frac{1}{30}\square ABCD$

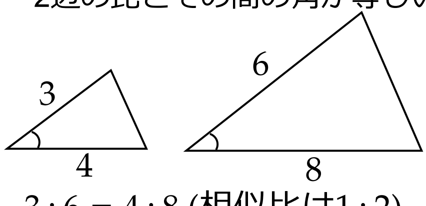
**※頻出の構図なのでアプローチに悩むことはない。ただし相似比を4つ使った上で、
最後に連比を使うため手順が多い。**

基本知識の確認
・3角形の相似条件

①　2角が等しい

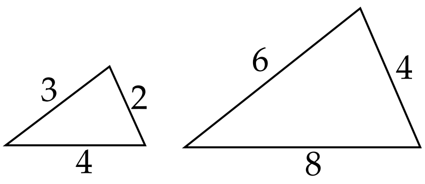


②　2辺の比とその間の角が等しい



$3 : 6 = 4 : 8$ (相似比は$1 : 2$)

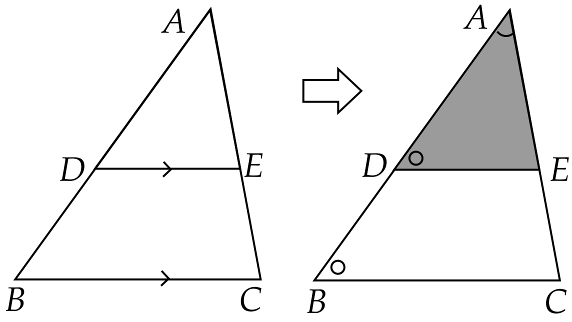
③　3辺の比が等しい



$3 : 6 = 4 : 8 = 2 : 4$ (相似比は$1 : 2$)

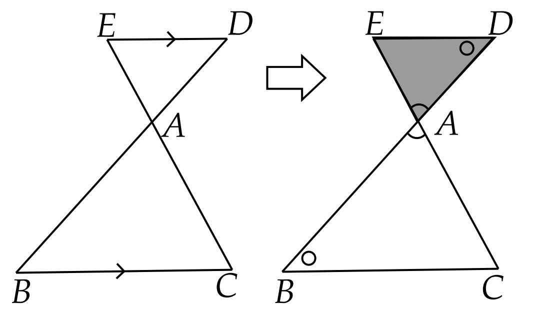
・相似の基本形

ピラミッド型



$DE \parallel BC \Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle ADE$

チョウチョ型



$DE \parallel BC \Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle ADE$

$\boxed{5}$ 問2

1. $A-BCD$の体積を求める

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot 6^3 = 18\sqrt{2}$$ (公式使った)

2. 三角錐$A-BMQ$の体積を求める

$$A-BMQ = \frac{AM}{AC}\cdot\frac{AQ}{AD}\cdot(A-BCD) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}(A-BCD)$$

切断された三角錐の公式

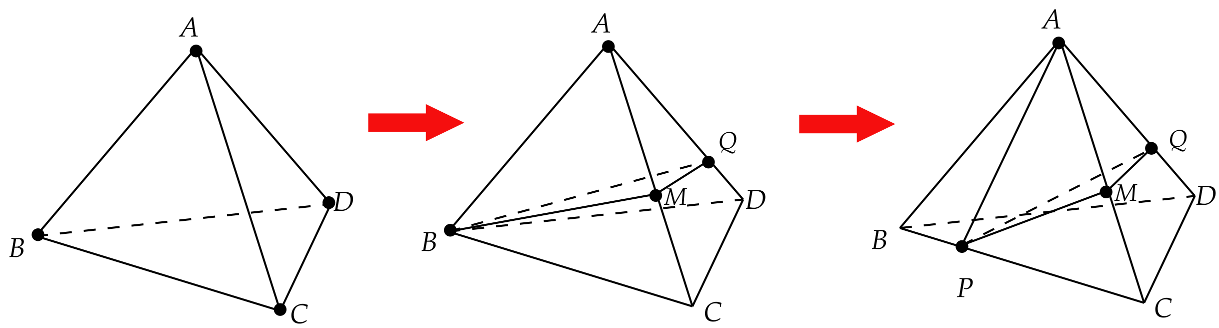
$$= \frac{1}{3}(A-BCD) = \frac{1}{3}\times 18\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

3. 三角錐$A-PMQ$の体積を求める

$$A-PMQ = \frac{PC}{BC}(A-BMQ) = \frac{4}{6}(A-BMQ)$$

$$= \frac{2}{3}\times 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$\triangle AMQ$を底面と見れば、三角錐の高さが$\frac{4}{6}$になった

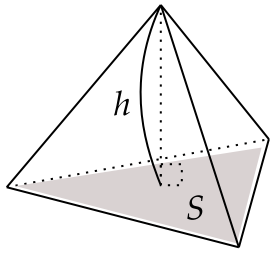


※切断された三角錐の公式を知っていれば易しい問題。2017年、2019年にも類題が出題されている。

知っていると便利な立体図形の知識

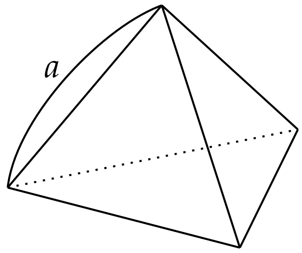
・錐体の体積の公式

$$V = S \times h \times \frac{1}{3}$$



・正四面体の体積の公式

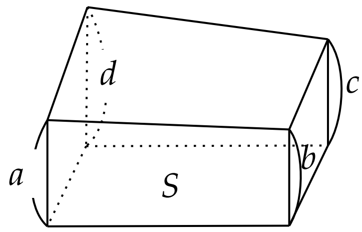
$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$



・切断された直方体の公式

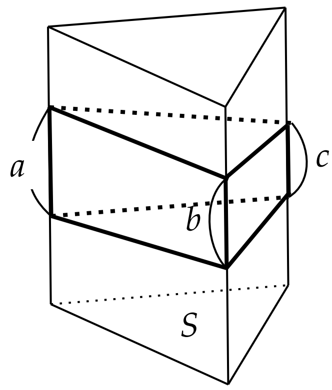
$$a + c = b + d$$

$$V = S \times \frac{a+c}{2}$$



・切断された三角柱の公式 (断頭三角柱の公式ともいう)

$$V = S \times \frac{a+b+c}{3}$$



・切断された三角錐の公式 (都立で頻出)

$$O-PQR = O-ABC \times \frac{p}{a} \times \frac{q}{b} \times \frac{r}{c}$$