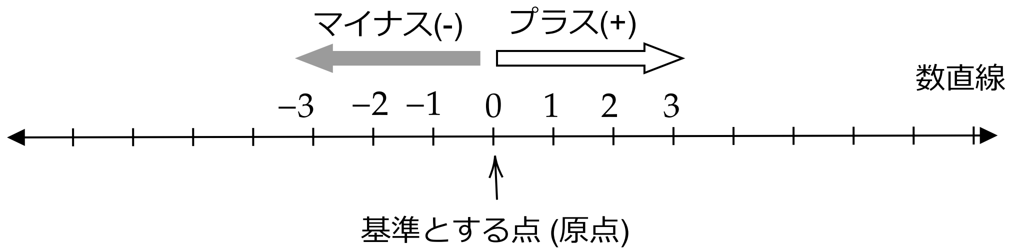
7月1日

マイナス × マイナス ＝ プラスとなる理由

0. 数の集合を負の数(マイナスの数)にまで広げる



・基準とする原点O(ゼロ)をどこかに定めて、ある方向を正の数(プラス)、反対の方向を負の数(マイナス)とする。この例では、右方向を正の方向にしている。
正の数を$+2,\ +5$・・・、負の数を$-2,\ -5$・・・と表す。
・ある数と原点との距離は、+, −を取った数字$2,\ 5$・・・で表す。
(これを絶対値と呼び、$|2| = |-2| = 2$と表す)

1. 正負の符号の2つの意味

・数の位置を示す意味 (位置の意味)
たとえば、+2は原点から右に2の距離の位置、−2は原点から左に2の距離の位置をそれぞれ表している。

・動作の方向を示す意味 (方向の意味)
たとえば、
- 「右に進む」をプラスとしたら、反対の「左に進む」はマイナス。
- 「時間が進む」をプラスとしたら、反対の「時間がさかのぼる」はマイナス。
(ビデオを逆回しにするイメージ)
- お財布に「お金が入る」をプラスとしたら、反対の「お金が出ていく」はマイナス。

・2つの意味から数学的にマイナス × マイナス ＝ プラスとなる理由を説明する。
aを正の数とすると、aと$-a$は原点からの距離が等しいから、両者を足し算すると0となる。足し算をして答えが0となる数を互いに他の反数という。
- aの反数は$-a$だから、$a+(-a)=0$
- $-a$の反数はaだから、$(-a)+a=0$

以上より、aの反数$(-a)$の反数は$+a$となるから、
$$-(-a) = +a \qquad (1)$$
$-(-a)$の最初の−符号は動作の方向を示しており、$-a$の反対方向に1倍することを

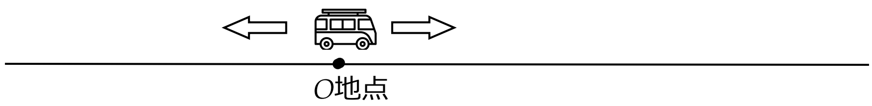
あらわしており、二番目の−符号($-a$)は位置をあらわしている。(1)式を以下のように変形していくと、

$$-(-a) \quad = \quad +a$$
$$(-1)\times(-a) \quad = \quad (+1)\times(+a)$$
$$(-1)\times(-1)\times(+a) \;=\; (+1)\times(+a)$$

したがって、$(-1)\times(-1) = (+1)$

2. もう1度動く車の例

O地点を原点として、右方向をプラスとする



・車がO地点(基準の点とする)を通過して、左右どちらかに時速$5km$で進む。
・O地点を原点、右方向をプラスの方向と定める(左方向をプラスにしても結果は同じ)。
・車は右に向かって進む場合、速度は$+5km/$時となる。

2-1. プラス × プラス = プラス

・2時間経過した時の車の位置は、

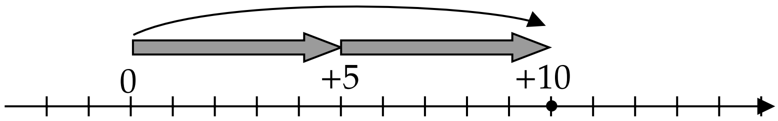
$(+5km/$時$)$ × $(+2$時間$)$ = $+10km$

プラス方向に計算操作する = 1時間当たり5km右に走る (ア)

プラス方向に計算操作する = 2時間経過させる (イ)

位置を示す = プラス方向に10kmの位置 (ウ)

プラスの方向を持った(ア)を
プラス方向に2倍する(イ)と、
(ウ)の位置にくる



では、マイナスの数を取り入れた場合の計算はどうなるか。

2-2. マイナス × プラス = マイナス

・車が原点から左方向に進む場合は、負の数を使わなくても
$(5km/$時$)$ × $(2$時間$) = 10km$として、原点から左に$10km$の位置だと分かるが、
速度は$-5km/$時と考えれば、$(-5km/$時$)$ × $(+2$時間$) = -10km$
となり、原点から左の方向に$10km$進んで、$-10km$の位置にくることがわかる。

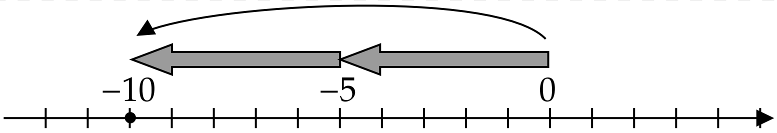
$(-5km/\text{時})$ × $(+2\text{時間})$ = $-10km$

マイナス方向に計算操作する
= 1時間当たり5km左に走る
(ア)

プラス方向に計算操作する
= 2時間経過させる
(イ)

位置を示す
= マイナス方向に10kmの位置
(ウ)

マイナスの方向を持った(ア)を
プラス方向に2倍する(イ)と、
(ウ)の位置にくる



2-3. プラス × マイナス = マイナス

・車が右方向に進み、原点の位置に来る2時間前の位置は、

$(+5km/\text{時}) \times (-2\text{時間}) = -10km$

と計算できて、原点から左の方向に$10km$戻って、$-10km$の位置にいることがわかる。

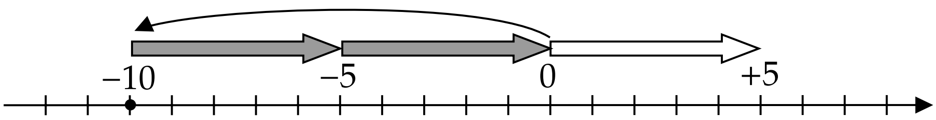
$(+5km/\text{時})$ × (-2時間) = $-10km$

プラス方向に計算操作する
= 1時間当たり5km右に走る
(ア)

マイナス方向に計算操作する
= 2時間さかのぼる
(イ)

位置を示す
= マイナス方向に10kmの位置
(ウ)

プラスの方向を持った(ア)を
マイナス(時間がさかのぼる)方向に2倍する(イ)と、
(ウ)の位置にくる



2-4. マイナス × マイナス = プラス

・車が左方向に進み、原点の位置に来る2時間前の位置は、

$(-5km/\text{時}) \times (-2\text{時間}) = +10km$ となり、プラスの右側にいることがわかる。

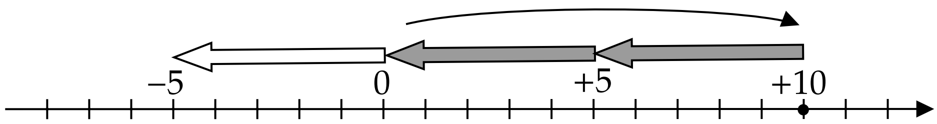
$(-5km/\text{時})$ × (-2時間) = $+10km$

マイナス方向に計算操作する
= 1時間当たり5km左に走る
（ア）

マイナス方向に計算操作する
= 2時間さかのぼる
（ィ）

位置を示す
= プラス方向に10kmの位置
(ウ)

マイナスの方向を持った(ア)を
マイナス(時間がさかのぼる)方向に2倍する(イ)と、
(ウ)の位置にくる



・2-1から2-4までのケースで、正負にかかわらずすべての数を(距離) = (速度)×(時間)の公式に機械的に数値を代入すれば、正しい結果を得られている。つまり、今まで正の数だけで成立していた公式がそのまま負の数にも適用できていることがわかる。

3. お金の動きの例

・A君はゲーム機を買いたいと考えていますが、手元のお金では少し足りないので、おかあさんから借金をしてゲーム機を買うことにしました。
・7月初めには、元々持っていたお金10,000円に毎月のおこづかい3,000円をおかあさんからもらいました。ゲーム機は15,000円なので、あと2,000円足りません。そこで、おかあさんから2,000円の借金をして、8月のおこづかいから2,000円を差し引いてもらいます。
・A君のお財布のお金の流れ(お金を入れる、お金を出す)を記録していくと以下のように整理出来ます。
・お財布にお金が入ることをプラス、反対にお財布からお金を出すことをマイナスの符号で記録することにしました。表で右側にプラス、左側にマイナスと分けて記録します。左右のプラスとマイナスを足すと、その時点のA君の財布の中の金額がわかるようになっています。

7月初め

お金をお財布から出す(マイナス)			お金をお財布に入れる(プラス)		
			元々持っていたお金	10,000	1
			おこづかい(7月分)	3,000	1
借金をいつか返す	-2,000	1	借金	2,000	1
合計	-2,000		合計	15,000	

・7月初めは、元々持っていたお金10,000円、7月分のおこづかい3,000円、借金2,000円を足してお財布の中には15,000円が入りました(プラス側の操作)。
また、借金は将来返さないといけませんので、将来返す義務として、お金を出す方向の操作を、あらかじめ左側のマイナス欄に記録しておきます。

・7月初め時点でのA君のお財布の中の金額は、

$+15,000$円 + $(-2,000)$円 $=+13,000$円となります。

借金$2,000$円分はA君のものではないので、実際の財布の中の$15,000$円から$2,000$円少ない金額となっています。

7月終わり

お金をお財布から出す(マイナス)			お金をお財布に入れる(プラス)		
ゲームを買う	-15,000	1	元々持っていたお金	10,000	1
			おこづかい(7月分)	3,000	1
借金をいつか返す	-2,000	1	借金	2,000	1
合計	-17,000		合計	15,000	

・7月のある日曜日に15,000円のA君はゲーム機を買いました。お財布から15,000円を出したので、左側に$-15,000$円を記録します。

・ゲーム機を買った時点でのA君のお財布の中身は、

$+15,000$円 + $(-17,000)$円 $=$ $-2,000$円となります。お財布の中身はカラッポになって、なおかつ$-2,000$円が残っている、すなわち$2,000$円を返す義務だけあるということになります。

8月初め

お金をお財布から出す(マイナス)			お金をお財布に入れる(プラス)		
ゲームを買う	-15,000	1	元々持っていたお金	10,000	1
			おこづかい(7月分)	3,000	1
			おこづかい(8月分)	3,000	1
借金をいつか返す	-2,000	1	借金	2,000	1
借金返した	-2,000	-1	おこづかい(8月分)から借金分減らされる	-2,000	1
合計	-15,000		合計	16,000	

・8月初め、8月分のおこづかいをもらいますが、おかあさんに2,000円の借金も返さないといけないので、差し引き1,000円(=3,000-2,000)だけおこづかいをもらいました。差し引き1,000円のおこづかいとなった理由がわかるように、記録ではおこづかい(8月分)3,000円をもらったことと、おこづかい(8月分)3,000円から借金分の2,000円を減らす(=マイナス)操作をしたことを$-2,000$円としてプラス側に記録します。

・借金を返したので、左のマイナス側でもその操作を記録します。借りたお金として$-2,000$円として記録していたのに対して、借りるの反対の返す操作として-1倍の操作をします。この操作によって、お金を借りる、お金を返すという反対の操作をペアにしてゼロにすること(相殺するという)ができます。

お財布から出すべきお金を1回借りた　$-2,000$円 $\times$ $(+1)$ $=$ $-2,000$円

お財布から出すべきお金を1回返した　$-2,000$円 $\times$ (-1) $=$ $+2,000$円

・8月初めの時点でのA君のお財布の中身は、

$+16,000$円 $+$ $(-15,000)$円 $=$ $+1,000$円となり、$1,000$円だけお財布にあることがわかります。

4. ソーラーパネルを設置した家庭の例

・家庭では電気代をいくら支払うかに関心があり、電気代は消費した電力量(kwh)から

計算される(注)。電気を消費することをプラスの方向として、ソーラーパネルで電気をつくることをマイナスとする。(電気をつくった分は電気代からマイナスされる)

(注)　電力量(kwh)　=　電気(kw)　×　時間(h)

・ある日の午前の3時間の消費した電力量と発電した電力量を1時間ごとに整理すると、
消費(照明、洗濯、テレビなど)
9:00-10:00　　$5kw$(キロワット)を1時間消費した:　　$(+5)\times(+1) = +5kwh$
10:00-11:00　　$5kw$(キロワット)を1時間消費した:　　$(+5)\times(+1) = +5kwh$
11:00-12:00　　$5kw$(キロワット)を1時間消費した:　　$(+5)\times(+1) = +5kwh$
つまり合計として、　$(+5)kw\times(+3)h = (+15)kwh$ となる

発電(ソーラーパネル)
9:00-10:00　　$2kw$(キロワット)を1時間発電した:　　$(-2)\times(+1) = -2kwh$
10:00-11:00　　$2kw$(キロワット)を1時間発電した:　　$(-2)\times(+1) = -2kwh$
11:00-12:00　　$2kw$(キロワット)を1時間発電した:　　$(-2)\times(+1) = -2kwh$
つまり合計として、　$(-2)kw\times(+3)h = (-6)kwh$ となる

・以上から、午前の3時間で支払いの対象となる電力量は以下のように計算される。

$$(+15) + (-6) = (+9)kwh$$

・ここで、もし11:00に外出するので、11:00から12:00の電気を消費しなくなった場合を考える。11:00時点まで時間をさかのぼって、あと1時間消費するはずだった電力量を計算すると、$(+5)kw\times(-1)h = (-5)kwh$となる。
この場合、消費した電力量は、$(+15)kwh + (-5)kwh = (+10)kwh$となる。
同様に、11:00から天気が曇りになってソーラーパネルが11:00-12:00の間発電しない場合を考えると、発電したはずの電力量は、$(-2)kw\times(-1)h = (+2)kwh$となる。

ここで、マイナス×マイナスの計算が登場。
電気代からマイナスとなる発電量(-2)に対して、時間を1時間さかのぼって(-1)かけることによって、反対の電気代を支払う方向のプラスの答え$(+2)$が出てくる。
この場合、発電した電力量は、$(-6)kwh + (+2)kwh = (-4)kwh$となる。

5. 数学だけの世界で一般化してみると・・・

・以上3つの例で、正負の数を使って車の位置を予測したり、お金の流れを記録したり、電気代の計算をした。これらの例では、正負の数(プラスマイナスの符号)を使用せず、毎回人間が数のプラスとマイナスの状況を理解してプラスの数だけで足し算・ひき算をしていることが多い。
・しかし、多様な科学的な現象や社会活動を数式で説明したり、分析出来るようにするため広く適用できる一般化された法則、公式、モデルといったものを用意すれば、いろんな分野に適用できて便利、大量のデータ計算でもコンピュータで計算できる。

・実際に、車の例で用いた数式を単位などを省略して表すと以下の通り。

$$(+5)\times(+2)=(+10)$$
$$(-5)\times(+2)=(-10)$$
$$(+5)\times(-2)=(-10)$$
$$(-5)\times(-2)=(+10)$$

(距離)=(速度)×(時間)の公式に符号付きの数を代入すれば、正しい答えが得られる。
人間が毎回状況を理解して、プラスかマイナスかを判断しなくてもよい。

・具体的な例から切り離された数式だけを見ると、一般化・抽象化された分、理解しにくくなる。こういう場合は、理解を助ける日常の具体例をイメージすることが有効。
「木に花がさく」という抽象的な表現でも理解しやすいのは、具体的な例が沢山あって、イメージしやすいから。しかし、マイナス×マイナスの計算は日常では使用することが少なく、イメージしにくいのも事実ですが。

・ここで、数学だけの世界を見て、マイナス×マイナス = プラスとなることが他の数学の法則とつじつまがあっているかを確認する。
・数学の乗法の法則として、交換法則、結合法則、分配法則の3つが成り立つ必要がある。
・まず、正負のかけ算のルールは以下の通り。これらが3つの法則とつじつまがあうか。

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & (+\ )\times(+\ )=+\\(2) & (-\ )\times(-\ )=+\end{array}\right)\text{同符号の場合、プラスになる}$$
$$\left.\begin{array}{ll}(3) & (+\ )\times(-\ )=-\\(4) & (-\ )\times(+\ )=-\end{array}\right)\text{異符号の場合、マイナスになる}$$

- 交換法則 $a\times b=b\times a$

(1), (2)とも「元の数」と「かける数」を入れ替えても答えは同じになる。(3)と(4)は交換法則そのものなので、つじつまはあう。

- 結合法則 $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$

これも計算の順序によらず、答えは同じになる。

- 分配法則 $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

この法則とつじつまがあうかは検証が必要で、具体的な例で試してみる。

$(-5)\times(-2)$について、$(-2)=(0-2)$だから、
$(-5)\times(-2)=(-5)\times(0-2)=(-5)\times 0-(-5)\times 2=0-(-10)=+10$
よって、分配法則が成り立つことと、マイナス×マイナス = プラスとなることはつじつまがあっている。

・その他、「かける数」を1ずつ変える場合、答えが規則的に変わるかの検証。

$$
\begin{aligned}
(-5) \times 2 &= -10 \\
&\quad \text{5増える} \\
(-5) \times 1 &= -\ 5 \\
&\quad \text{5増える} \\
(-5) \times 0 &= \quad 0 \\
&\quad \text{5増える} \\
(-5) \times (-1) &= +\ 5 \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}
$$

マイナス× マイナス = プラスとなっている
ことで、規則性は保たれている

6. まとめ

・プラスマイナスの符号には、数の位置を示す意味と数の方向性を示す意味がある。
・マイナス×マイナス = プラスとなる理由は、
(方向性を持った数)×(方向性を持った数) = (位置を示す数)　において、
(反対の方向性を持った数)×(反対の方向性を持った数) = (元の方向の位置を示す数)
となるから。
・車の例でいうと、右方向をプラスとした場合に左に進む車の速度はマイナス、さかのぼる時間をマイナスとすれば、マイナス×マイナスで車はプラスの右の位置にくる。
・数学は、現実の科学的現象や社会活動を説明したり、予測するための道具として発展すると共に、数学だけの世界でも矛盾のないように論理で作られている。
・負の数が広く普及し始めたのは、12世紀のインドと14世紀のイタリアあたりで、商人による借金のやりとりを記録するためであった。ヨーロッパで負の数が公認され、学校で教えられるようになったのはかなり最近の19世紀になってから。

・以上、長々とマイナス ×マイナス = プラスについて説明してきましたが、実はマイナス×マイナス = マイナスとなる数があります。これは高校で習う数学の範囲なので当面はマイナス ×マイナス = プラスと理解しておいてください。

・マンガ「天才バカボン」の中で、バカボンのパパが(何かの意見に対して)「反対の反対は賛成なのだ!」というセリフを言っている。マンガの作者が数学を意識していたかどうかわかりませんが、マイナス ×マイナス = プラスと発想は同じかもしれません。